Київський університет імені Бориса Грінченка

Олександр Рудик

Аналіз статистичних даних і критерії прийняття гіпотез

Київ
2009

ПЕРЕДМОВА

Цей посібник є конспектом лекцій, які автор прочитав студентам Київського міського педагоггічного університету імені Б.Д. Грінченка.

Перед знайомством з посібником бажано відновити у пам'яті базові поняття теорії ймовірностей: імовірнісний простір, подія, випадкова величина і її розподіл, сумісний розподіл випадкових величин, поняття про закон великих чисел і центральну граничну теорему. Ці питання студенти обов'язково вивчають перед знайомством з власне математичною статистикою. Для читача, який повсякденно не стикається з цими поняттями, таке знайомство бажане хоча б для впевненості у спроможності зрозуміти математичні основи викладених критеріїв. Цю впевненість створюють для психологічного комфорту, бо для спеціалістів-гуманітаріїв відповідні знання не є обов'язковими.

Виклад матеріалу є само замкненим. Щоб скористатися статистичними критеріями для виконання наукового педагогічного дослідження, достатньо використати лише інформацію, викладену в посібнику. Враховуючи спрямованість спеціальностей студентів, автор обійшов питання обґрунтування критеріїв, а зосередився на їх *стислому* і прозорому викладі, зручному для практичного використання. Публікації інших авторів поряд з викладом статистичних критеріїв містять детальний опис прикладів їх використання (див.:

[1] Гублер Е.В. Вычислительные методы анализа и распознавания патологических последствий. – Л.: Медицина, 1978. – 296 с.

[2] Носенко И.А. Начала статистики для лингвистов. – М.: Высшая школа, 1981. – 157 с.

[3] Рунион Р. Справочник по непараметрической статистике. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 198 с.

[4] Сидоренко Е.В. Математические методы обработки в психологии. – СПб., Речь, 2001. – 349 с.

[5] Стивенс С. Математика, измерение и психофизика. Экспериментальная психология / Под. ред. С.С. Стивенса / Перевод с англ. под ред. действ. чл. АМН СССР П..К. Анохина, док. пед. наук В.А. Артемова. – М.: Иностранная литература, 1960. – Т. 1. – С. 19–92.

[6] J. Green, M. D'Olivera. Learning to Use Statistical Tests in Psychology: a Student's Guide. – Milton Keynes Philadelphia, Open University Press, 1989. – 180 p.)

Посібник адресовано студентам педагогічних університетів і аспірантам гуманітарних спеціальностей.

1. ШКАЛИ Й ВИМІРЮВАННЯ

Вимірювання – це надання числових форм об'єктам чи подіям у відповідності з певними правилами. С. Стівенс[1] запропонував розподілити шкали вимірювання на 4 типи:

- номінативна (номінальна) чи шкала назв;
- порядкова або ординальна шкала;
- інтервальна (шкала рівних інтервалів);
- шкала рівних відношень (пропорцій).

Номінативна шкала – це шкала, яка класифікує за назвою (від. *nomen* (лат.) – ім'я, назва). Ця шкала – це спосіб класифікації об'єктів чи суб'єктів, розподілу їх на певні множини (класи). Ніякий частковий порядок множин не передбачається. В імовірнісному описі явища кожній номінативній шкалі відповідає сукупність попарно несумісних подій, об'єднання який є достовірною подією (простором всіх елементарних подій). Наприклад, або даний індивідуум є дальтоніком, або він не є дальтоніком. Номінативна шкала слугує для підрахунку частот відповідних подій. *Одиниця вимірювання* – одне спостереження.

Порядкова шкала – це спосіб розподілу об'єктів чи суб'єктів на певні множини, для яких можна встановити відношення (лінійного) порядку. Інакше кажучи, можна порівнювати довільні такі множини, встановлюючи відношення "більше" або "менше". Очевидно, що для *змістовної* порядкової шкали потрібно не менше трьох класів. Наприклад, реакцію виборців на заяву кандидата у президенти можна назвати позитивною, нейтральною і негативною з очевидним порядком. Класи порядкової шкали можна занумерувати елементами числової множини, на якій вже є певний порядок (наприклад, натуральними числами), причому безліччю способів. Тому відстань між цими числами на числовій прямій визначає "відстані" між елементами класів *для порядкової шкали*. *Одиниця вимірювання* – відстань в 1 клас (ранг).

Інтервальна шкала – це шкала класифікації за принципом "менше на певну кількість одиниць" і "більше на певну кількість одиниць".

Шкала рівних відношень – це шкала класифікації пропорційно ступеню вираженості певної ознаки.

В імовірнісному описі явища кожній шкалі рівних відношень відповідає випадкова величина, яка вимірюється у стохастичному експерименті, причому мають зміст арифметичні операції (додавання, віднімання, множення й ділення) над результатами вимірювання. Такою є, наприклад, шкали вимірювання фізичних величин. Емпіричні частоти подій також можна розглядати в межах шкали рівних відношень.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕМПІРИЧНОГО РОЗПОДІЛУ

Нехай x_j – результат j-го спостереження певної випадкової величини у серії n незалежних спостережень. Позначимо такі величини:

$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j$ – оцінка математичного сподівання;

[1] Стивенс С. Математика, измерение и психофизка // Экспериментальная психология / Под ред. С.С. Стивенса / Пер. с англ. под ред. действ. чл. АМН СССР П.К. Анахина, докт. пед. наук В.А. Артемова. – М.: Иностранная литература, 1960, – Т. 1. – С. 19-92.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$$ – оцінка дисперсії;

$$A = \frac{1}{n\sigma^3} \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^3$$ – коефіцієнт асиметрії (міра відхилення емпіричного розподілу від симетричного відносно $\bar{x}$);

$$E = \frac{1}{n\sigma^4} \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^4 - 3$$ – показник ексцесу.

3. СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ І КРИТЕРІЇ ПРИЙНЯТТЯ ГІПОТЕЗ

Гіпотеза **–** висловлювання про співвідношення між порівнюваними величинами, визначеними в результаті стохастичного експерименту.

Нульова гіпотеза H_0 **–** (як правило) гіпотеза про відсутність відмінностей між порівнюваними величинами.

Альтернативна гіпотеза H_1 **–** (як правило) заперечення нульової гіпотези H_0, тобто гіпотеза про значимість відмінностей між порівнюваними величинами. Як правило, це те, що ми прагнемо довести, тому її інколи називають експериментальною гіпотезою.

Нульова і альтернативна гіпотези можуть бути одночасно

або ***спрямовані*** ($H_0 = (a \le b)$, $H_1 = (a > b)$),

або ***не спрямовані***($H_0 = (a = b)$, $H_1 = (a \ne b)$).

Статистичний критерій **–** це алгоритм прийняття або відхилення гіпотез на основі статистичних даних (статистик). Статистичні критерії розподіляють на:

- ***параметричні***, які використовують оцінки параметрів розподілу – математичного сподівання і дисперсії;
- ***непараметричні***, які не використовують оцінки параметрів розподілу.

Рівень значимості критерію **—** це ймовірність ***помилки І роду***, тобто помилки відхилення нульової гіпотези H_0 за умови, що вона справджується. Історично склалися такі уявлення про низький, достатній і високий рівні статистичної значимості як такі, що не перевищують відповідно 0.05 (5 %), 0,01 (1 %) і 0,001 (0,1 %).

Потужність критерію **–** це ймовірність того, що не зроблено ***помилку ІІ роду***, тобто ймовірність не прийняття нульової гіпотези H_0 за умови, що вона не справджується.

Порівняльну характеристику параметричних і непараметричних критеріїв подано у таблиці 15 додатку.

4. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ І МЕТОДІВ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розв'язання перерахованих далі задач проводять при відповідності критеріїв і умов дослідження, перерахованих у дужках після назв критеріїв.

1. Виявлення відмінностей на рівні досліджуваної ознаки:

- 2 вибірки – критерій Розенбаума Q ($n_1 \ge 11$, $n_2 \ge 11$, $n_1 \approx n_2$), критерій Манна-Уітні ($\min(n_1, n_2) < 11$) або φ^*-критерій (кутове перетворення Фішера);
- 3 і більше вибірок – критерій тенденцій Джонкіра S ($n \le 10$ і $c \le 6$) або критерій Крускала-Уолліса H ($n > 10$ або $c > 6$).

2. Визначення зміщення досліджуваної ознаки:

- 2 вимірювання на одній і тій же вибірці – G-критерій знаків (якісні зміщення або кількісні зміщення у вузькому діапазоні), T-критерій Вілкоксона (кількісні зміщення, які можна впорядкувати за інтенсивністю), або φ^*-критерій (кутове перетворення Фішера);
- 3 і більше вимірюваннь на одній і тій же вибірці – χ_r^2-критерій Фрідмана ($n \le 12$ і $c \le 6$) або L-критерій тенденцій Пейджа ($n > 12$ або $c > 6$).

3. Виявлення відмінностей у розподілі ознаки:

- порівняння емпіричного і теоретичного розподілів – χ^2-критерій Пірсона (довільна шкала), λ-критерій Колмогорова-Смірнова (порядкова шкала) або m-біноміальний критерій ($n \le 50$, 2 розряди значень));
- порівняння двох емпіричних розподілів – χ^2-критерій Пірсона (довільна шкала), λ-критерій Колмогорова-Смірнова (порядкова шкала) або φ^*-критерій (кутове перетворення Фішера, 2 розряди значень).

4. Виявлення ступеня узгодженості змін двох ознак чи двох ієрархій або профілів – r_s-коефіцієнт рангової кореляції Спірмена.

5. Аналіз змін ознаки під впливом контрольованих умов:

- під впливом одного фактора – S-критерій тенденцій Джонкіра, L-критерій тенденцій Пейджа або однофакторний дисперсійний аналіз Фішера;
- під впливом двох факторів – двофакторний дисперсійний аналіз Фішера.

5. СТАТИСТИЧНІ КРИТЕРІЇ

Критерії описано у тому ж порядку, в якому подано статистичні таблиці додатку.

5.1. *Q*-критерій Розенбаума.

Призначення: порівняння *двох* вибірок щодо рівня певної ознаки.

Обмеження: довжини вибірок n_1 і n_2 більші за 10. Гублер[2] пропонує дотримуватися таких правил:

- якщо n_1 і n_2 не перевищують 50, то $|n_1 - n_2|$ не має перевищувати 10;
- якщо n_1 і n_2 розташовані в межах від 51 до 100, то $|n_1 - n_2|$ не має перевищувати 20;
- якщо n_1 і n_2 більші за 100, то відношення $\max(n_1, n_2) / \min(n_1, n_2)$ не має перевищувати 2.

Гіпотези:

H_0 – рівень ознаки у вибірці 1 не перевищує рівня ознаки у вибірці 2;

H_1 **–** рівень ознаки у вибірці 1 перевищує рівень ознаки у вибірці 2.

[2] Гублер Е.В. Вычислительные методы анализа и распознавания паталогических последствий. – Л.: Медицина, 1978. – 296 с.

Алгоритм:

1. Перевірити допустимість використання критерію (див. обмеження).
2. Впорядкувати значення ознаки за зростанням у кожній вибірці.
3. Визначити M_2 – найбільше значення ознаки у вибірці 2.
4. Визначити S_1 – кількість значень вибірки 1, які більші за M_2.
5. Визначити m_1 – найменше значення ознаки у вибірці 1.
6. Визначити s_2 – кількість значень вибірки 2, які менші за m_1.
7. Обчислюємо $Q = S_1 + s_2$.
8. Якщо $\max(n_1, n_2) \le 26$, то за таблицею 1 додатку визначаємо критичне значення Q_ρ для даних n_1 і n_2, інакше покладемо $Q_{0,05} = 8$, $Q_{0,01} = 10$.
9. Якщо $Q \ge Q_\rho$, то відхиляємо гіпотезу H_0.

5.2. *U*-критерій Манна-Уітні

Призначення: порівняння *двох* вибірок щодо рівня певної ознаки з метою визначення, наскільки мала зона спільних значень. Чим менша така зона, тим ймовірніше, що відмінності достовірні. Існує кілька способів використання критерію і відповідних варіантів таблиць критичних значень.

Обмеження: довжини вибірок n_1 і n_2 знаходяться в межах від 3 до 60.

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – рівень ознаки у вибірці 2 не нижче рівня ознаки у вибірці 1;

$\boldsymbol{H_1}$ – рівень ознаки у вибірці 2 нижче рівня ознаки у вибірці 1.

Алгоритм:

1. Дані вимірювань об'єднуємо в один масив довжини $n = n_1 + n_2$, помітивши, які величини якої вибірки стосуються.

2. Впорядковуємо утворений масив величин за зростанням.

3. Кожному результату вимірювання приписуємо ранг – номер відповідного елемента *впорядкованого* масиву. Якщо кілька вимірювань мають один і той же результат, то всім їм приписуємо ранг, що є середнім арифметичним номерів відповідних елементів *впорядкованого* масиву. Таким чином, сума рангів усіх результатів вимірювання дорівнює $n(n+1)/2$.

4. Визначаємо за даними вибірок:

- T_1 і T_2 – суми рангів відповідно для вибірок 1 і 2;
- $T = \max(T_1, T_2)$ і номер вибірки x з максимальною сумою рангів – $T_x = \max(T_1, T_2)$;
- $U = n_1 \cdot n_2 + n_x(n_x+1)/2 - T_x$.

Деякі автори рекомендують визначати

$$U = \max(n_1 \cdot n_2 + n_1(n_1+1)/2 - T_1,\; n_1 \cdot n_2 + n_2(n_2+1)/2 - T_2).$$

5. Визначаємо за таблицею 2 додатку критичну величину U_ρ (для $\rho = 0{,}05$ або $\rho = 0{,}01$).

6. Якщо $U \ge U_\rho$, то приймаємо гіпотезу H_0. Чим менша величина U, тим вища вірогідність відмінностей.

5.3. Н-критерій Крускала-Уолліса

Призначення: порівняння *трьох і більше* вибірок щодо рівня певної ознаки. Встановлюють наявність зміни рівня ознаки без виявлення напряму цих змін.

Обмеження: для встановлення різниці рівнів на високому рівні значимості потрібно, щоб кожна вибірка містила не менше 3 вимірювань. Подана у додатку таблиця 3 містить дані лише для 3-х вибірок. Для більшої кількості вибірок і спостережень кожної вибірки можна скористатися таблицею значень критерію χ^2, який є асимптотичною границею даного критерію. Кількість степенів свободи ν при цьому на 1 менша за кількість порівнюваних вибірок c: $\nu = c - 1$. При порівнянні багатьох вибірок різниця між конкретною парою може бути непомітною. Для попарних порівнянь, кількість яких дорівнює $c(c-1)/2$, використовують критерій U або φ^*.

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – між вибірками є лише випадкові відмінності щодо рівня досліджуваної ознаки;

$\boldsymbol{H_1}$ – між вибірками є невипадкові відмінності щодо рівня досліджуваної ознаки.

Алгоритм:

1. Дані вимірювань об'єднуємо в один масив довжини $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_c$, помітивши, які величини якої вибірки стосуються.

2. Впорядковуємо утворений масив величин за зростанням.

3. Кожному результату вимірювання приписуємо ранг – номер відповідного елемента *впорядкованого* масиву. Якщо кілька вимірювань мають один і той же результат, то всім їм приписуємо ранг, що є середнім арифметичним номерів відповідних елементів *впорядкованого* масиву. Таким чином, сума рангів усіх результатів вимірювання дорівнює $n(n+1)/2$.

4. Визначаємо за даними вибірок:

T_j – суми рангів вибірок ($j = 1, 2, \ldots, c$);

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{c} \frac{T_j^2}{n_j} - 3(n+1).$$

5. Якщо розглядаємо три групи ($c = 3$) і $\max\{n_j\} \le 5$, то за таблицею 3 додатку визначаємо критичну величину H_ρ. Інакше покладаємо: H_ρ дорівнює відповідній критичній величині χ^2 з кількістю степенів свободи $\nu = c - 1$.

6. Якщо $H \ge H_\rho$, то відхиляємо гіпотезу H_0.

5.4. *S*-критерій тенденцій Джонкіра

Призначення: *S*-критерій використовують для виявлення тенденцій зміни ознаки при переході від однієї вибірки до іншої при порівнянні 3 і більше вибірок.

Обмеження:

- довжини вибірок $n_1, n_2, \ldots, n_c$ збігаються і більші за 1;
- кількість вибірок c більша за 2;

- *для поданої у додатку таблиці 4* кількість вибірок c не перевищує 6, а кількість вимірювань n_j у кожній вибірці не перевищує 10. Для більших c і n_j потрібно скористатися H критерієм Крускала-Уолліса (див. розділ 5.4).

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – тенденція зростання ознаки при переході від однієї вибірки до іншої є випадковою;

$\boldsymbol{H_1}$ – тенденція зростання ознаки при переході від однієї вибірки до іншої не є випадковою.

Алгоритм:

1. Перевірити статистичні дані щодо можливості використовувати алгоритм. Якщо кількості вимірювань у вибірках не збігаються, то потрібно *випадковим чином* вибрати підпослідовності вимірювань однакової довжини n з кожної вибірки.

2. Впорядкувати дані вимірювань для кожної вибірки за зростанням. В результаті отримаємо деяку матрицю (прямокутну таблицю) $\| a_{jk} \|$, де a_{1k}, a_{2k}, $a_{3k}, \ldots, a_{nk}$ – результати вимірювання вибірки k, впорядковані за зростанням.

3. Для кожного елемента a_{jk} в рядку j і стовпчику k знаходимо b_{jk} – кількість елементів цієї матриці, які знаходяться у стовпчиках *праворуч* від k-го і *більші* за a_{jk} .

4. Знаходимо B – суму всіх чисел b_{jk} .

5. Знаходимо різницю $2B$ і максимального значення B: $S = 2B - n\,c\,(c-1) / 2$.

6. За таблицею 4 додатку визначаємо критичну величину S_ρ для даних кількості вибірок c і кількості спостережень n.

7. Якщо $S \geq S_\rho$, то відхиляємо H_0.

5.5. *G*-критерій знаків Мак-Немара

Призначення: G-критерій використовують для встановлення напрямку зміщення рівня досліджуваної ознаки.

Обмеження: кількість вимірювань, в яких спостерігається зміщення рівня ознаки:

- не менша за 5;
- не більша за 300 *для поданої таблиці 5*.

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – переважання типового зміщення є випадковим;

$\boldsymbol{H_1}$ – переважання типового зміщення не є випадковим.

Алгоритм:

1. Вилучимо з вибірок вимірювання, яким відповідає нульове зміщення рівня ознаки і зменшимо кількість спостережень в обох вибірках до певного n.

2. Визначаємо n_+ і n_- – кількості вимірювань, в яких при переході від однієї вибірки до іншої рівень ознаки зростає і спадає відповідно. Маємо $n = n_+ + n_-$.

3. Знайдемо кількість нетипових зміщень

$$G = \min(n_+, n_-).$$

4. За таблицею 5 додатку знаходимо критичну величину G_ρ для даного n.

5. Якщо $G \leq G_\rho$, то приймаємо H_1 .

5.6. *T*-критерій Вілкоксона

Призначення: T-критерій порівнює результати вимірювання у двох різних умовах *на одній вибірці піддослідних* з метою визначення не тільки спрямованості змін ознаки, але і їх інтенсивності.

Обмеження: кількість вимірювань, в яких спостерігається зміщення рівня ознаки:

- не менша за 5;
- не більша за 50 *для поданої таблиці 6*.

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – інтенсивність зміщень у типовому напрямку не перевищує інтенсивність зміщень у нетиповому напрямку;

$\boldsymbol{H_1}$ – інтенсивність зміщень у типовому напрямку перевищує інтенсивність зміщень у нетиповому напрямку.

Алгоритм:

1. Вилучимо з вибірок вимірювання, яким відповідає нульове зміщення рівня ознаки і зменшимо кількість спостережень в обох вибірках до певного n.

2. Дані вимірювань — послідовність трійок чисел: перше і друге вимірювання, різниця між вимірюваннями — впорядкуємо за зростанням *абсолютної величини (модуля)* різниці вимірювань.

3. Кожному результату вимірювання приписуємо ранг — номер відповідного елемента *впорядкованого* масиву трійок (див. розділ 5.2).

4. Знайдемо T — суму рангів для зміщень у нетиповому напрямку[3].

5. За таблицею 6 додатку знаходимо критичну величину T_ρ.

6. Якщо $T \leq T_\rho$, то приймається гіпотеза H_1 .

5.7. Критерій χ_r^2 Фрідмана

Призначення: Критерій χ_r^2 використовують для порівняння показників, виміряних у трьох і більше умовах на *одній і тій самій вибірці піддослідних.*

Обмеження:

- кількість піддослідних n не менша за 2;
- кількість вимірювань c не менша за 3.

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – між результатами вимірювань, проведеними в різних умовах, є лише випадкові відмінності;

$\boldsymbol{H_1}$ – між результатами вимірювань, проведеними в різних умовах, відмінності мають невипадковий характер.

Алгоритм:

1. Для кожного піддослідного кожному результату вимірювання приписуємо ранг у порядку зростання результату (див. розділ 5.2).

2. Для $j = 1, 2, \ldots, c$ знаходимо T_j — суму встановлених рангів для результатів вимірювання j.

3. Знаходимо $\chi_r^2 = \dfrac{12}{nc(c+1)} \sum_{j=1}^{c} T_j^2 - 3n(c+1).$

4. Знаходимо критичну величину $\chi_r^2(\rho)$:

3 У напрямку, в якому кількість зміщень менша.

- якщо $c = 3$, $n \le 9$, то за таблицею 7А;
- якщо $c = 4$, $n \le 4$, то за таблицею 7Б;
- інакше за таблицею 9 критерію χ^2 з кількістю степенів свободи $\nu = c - 1$.

5. Якщо $\chi_r^2 \ge \chi_r^2(\rho)$, приймаємо гіпотезу H_1.

5.8. *L*-критерій Пейджа

Призначення: Критерій виявляє тенденції (напрям) зміни ознаки при переході від однієї умови вимірювання до іншої.

Обмеження:

- кількість піддослідних n не менша за 2 і *для поданих таблиць* не перевищує 12;
- кількість вимірювань c не менша за 3 і *для поданих таблиць* не перевищує 6.

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – збільшення результатів вимірювань при переході від однієї умови вимірювання до іншої є випадковим;

$\boldsymbol{H_1}$ – збільшення результатів вимірювань при переході від однієї умови вимірювання до іншої є невипадковим.

Алгоритм:

1. Для кожного піддослідного кожному результату вимірювання приписуємо ранг у порядку зростання результату (див. критерій Манна-Уітні (5.2)). Сума всіх таких рангів для кожного піддослідного дорівнює $c(c + 1)/2$.

2. Для $j = 1, 2,\ldots, c$ знаходимо T_j — суму встановлених рангів для результатів вимірювання j.

3. Впорядковуємо[4] умови вимірювання у порядку зростання сум рангів T_j.

4. Визначаємо $L = \sum_{j=1}^{c} j \cdot T_j$.

5. За таблицею 8 додатку визначаємо критичну величину L_ρ для даної кількості піддослідних n і даної кількості умов c.

6. Якщо $L \ge L_\rho$, приймаємо гіпотезу H_1 .

5.9. χ^2-критерій Пірсона

Призначення: Критерій застосовують у таких двох випадках:

- порівняння *емпіричного* розподілу з певним *теоретичним*;
- порівняння *двох емпіричних* розподілів.

Обмеження:

- довжина вибірки n має бути достатньо великою (хоча б $n \ge 30$);
- *теоретична* частота кожного розряду (проміжку значень) не менша[5] за 5;
- вибрані розряди вичерпують весь діапазон зміни ознаки, попарно не перетинаються і єдині для всіх порівнюваних ознак;
- при порівнянні розподілів ознак, які набирають лише 2 значення, потрібно вносити "поправку на неперервність".

Гіпотези:

<u>*Варіант 1*</u>

$\boldsymbol{H_0}$ – отриманий емпіричний розподіл збігається з теоретичним;

$\boldsymbol{H_1}$ – отриманий емпіричний розподіл не збігається з теоретичним;

<u>*Варіант 2*</u>

$\boldsymbol{H_0}$ – емпіричний розподіл 1 збігається з емпіричним розподілом 2;

$\boldsymbol{H_1}$ – емпіричний розподіл 1 не збігається з емпіричним розподілом 2.

Алгоритм:

1. Створюємо таблицю (матрицю) $\|a_{jk}\|$, в якій a_{jk} – частота розряду j для розподілу k. Тут *частота розряду для емпіричного розподілу* – це кількість результатів вимірювання, які потрапили до розряду. *Частота розряду для теоретичного розподілу* – це добуток довжини вибірки на ймовірність того, що результат вимірювання потрапить до даного розряду. Якщо теоретичний розподіл має неперервну складову, то знаходження ймовірностей пов'язане зі знаходженням визначених інтегралів.

2. Визначаємо кількість степенів свободи
$$\nu = J - 1,$$
де J – кількість розрядів.

3. Якщо $\nu > 1$, знайдемо $\chi^2 = \sum_{j=1}^{J} \frac{(a_{j1} - a_{j2})^2}{a_{j2}}$,

інакше (*поправка на неперервність*)
$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{2} \frac{(|a_{j1} - a_{j2}| - 1/2)^2}{a_{j2}}.$$

4. За таблицею 9 додатку визначаємо критичну величину χ_ρ^2 для даної кількості степенів свободи ν.

5. Якщо $\chi^2 \le \chi_\rho^2$, то приймаємо гіпотезу H_0.

5.10. λ-критерій Колмогорова-Смірнова

Призначення: Критерій застосовують у таких двох випадках:

- порівняння *емпіричного* розподілу з певним *теоретичним*;
- порівняння *двох емпіричних* розподілів для знаходження точки максимального накопичення розбіжностей між розподілами і визначення вірогідності цієї розбіжності.

Обмеження:

- довжини вибірок n_1 і n_2 мають бути великими, хоча б n_1 , $n_2 \ge 50$;
- розряди потрібно впорядкувати за наростанням чи за спаданням ознаки.

Гіпотези:

<u>*Варіант 1*</u>

$\boldsymbol{H_0}$ – отриманий емпіричний розподіл збігається з теоретичним;

$\boldsymbol{H_1}$ – отриманий емпіричний розподіл не збігається з теоретичним.

[4] Тобто перенумеровуємо.
[5] Інакше проведіть укрупнення розрядів.

Варіант 2

$\boldsymbol{H_0}$ – емпіричний розподіл 1 збігається з емпіричним розподілом 2;

$\boldsymbol{H_1}$ – емпіричний розподіл 1 не збігається з емпіричним розподілом 2.

Алгоритм порівняння емпіричного й теоретичного розподілів (*варіант 1*):

1. Створюємо таблицю (матрицю) $||b_{jk}||$, в якій b_{jk} – *відносна* частота розряду j для розподілу k, тобто відношення частоти розряду до довжини вибірки. Для теоретичного розподілу ($k = 2$) b_{jk} – ймовірність того, що випадкова величина набирає значення з розряду (проміжку) j.

2. Для $k = 1, 2$ рекурентно визначимо накопичені емпіричні відношення

$$c_{1k} = b_{1k},\ c_{jk} = c_{(j-1)\,k} + b_{jk} = \sum_{l=1}^{j} b_{lk}$$

і абсолютні величини їхніх різниць

$$d_j = |c_{j1} - c_{j2}|.$$

3. Знаходимо $d_{\max} = \max d_j$.

4. За таблицею 10А додатку визначаємо критичну величину d_ρ.

5. Якщо $d_{\max} \ge d_\rho$, то приймаємо гіпотезу H_1.

Алгоритм порівняння емпіричних розподілів (*варіант 2*)**:**

1. Створюємо таблицю (матрицю) $||b_{jk}||$, в якій b_{jk} – *відносна* частота розряду j для розподілу k, тобто відношення частоти розряду до довжини вибірки.

2. Для $k = 1, 2$ рекурентно визначимо накопичені емпіричні відношення

$$c_{1k} = b_{1k},\ c_{jk} = c_{(j-1)\,k} + b_{jk} = \sum_{l=1}^{j} b_{lk}$$

і абсолютні величини їх різниць

$$d_j = |c_{j1} - c_{j2}|.$$

3. Знаходимо $\lambda = \max d_j \cdot \sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$.

4. Якщо $\lambda \ge \lambda_\rho$, то приймаємо гіпотезу H_1 про відмінність розподілів. Тут $\lambda_{0,05} = 1{,}36$, $\lambda_{0,01} = 1{,}63$ визначені за таблицею 10 Б додатку, яка подає взаємозалежність λ і рівня статистичної значимості.

5.11. Критерій φ^* – кутове перетворення Фішера

Подано варіант методу, розроблений і описаний Гублером[6].

Призначення: Порівняння двох вибірок щодо частоти прояву певного ефекту.

Обмеження:

- жодна з порівнюваних часток не може дорівнювати 0;
- нижня межа кількості вимірювань – 2 спостереження у кожній вибірці. Але при цьому потрібно дотримуватися таких обмежень (подано для $n_1 \le n_2$):
  - якщо $n_1 = 2$, то $n_2 \ge 30$;
  - якщо $n_1 = 3$, то $n_2 \ge 7$;
  - якщо $n_1 = 4$, то $n_2 \ge 5$.

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – частка спостережень, для яких проявляється досліджуваний ефект, у вибірці 1 не більша, ніж у вибірці 2;

$\boldsymbol{H_1}$ – частка спостережень, для яких проявляється досліджуваний ефект, у вибірці 1 більша, ніж у вибірці 2;

Алгоритм:

1. Визначити критерій наявності чи відсутності ефекту у спостереженнях. Можна використати критерій λ для пошуку оптимальної точки розгалуження кількісно виміряної ознаки.

2. Для $j = 1, 2$ визначаємо:

m_j – кількість спостережень у вибірці j, у яких спостерігають досліджуваний ефект;

$\varphi_j = 2\arcsin\sqrt{m_j / n_j}$ — кут від 0 до π.

3. Знаходимо емпіричне значення

$$\varphi^* = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

4. Порівнюємо отриману величину φ^* з критичним значенням: $\varphi_{cr} = 1{,}64$ для $\rho \le 0{,}05$; $\varphi_{cr} = 2{,}31$ для $\rho \le 0{,}01$. Якщо $\varphi^* > \varphi_{cr}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Для точного визначення рівня значимості можна скористатися таблицею 11.

5.12. Біноміальний критерій *m*

Призначення: порівняння частоти прояву певного ефекту з теоретичною або заданою.

Обмеження:

- нижня межа кількості вимірювань – 5 (для деяких задач 2);
- верхня межа кількості вимірювань – від 50 до 300 – визначається наявними таблицями критичних значень;
- задана *відносна* частота P не перевищує 0,5.

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – частка спостережень, для яких проявляється досліджуваний ефект, у вибірці не перевищує теоретичну (задану, очікувану);

$\boldsymbol{H_1}$ – частка спостережень, для яких проявляється досліджуваний ефект, у вибірці перевищує теоретичну (задану, очікувану);

Алгоритм:

1. Визначаємо:
   - емпіричну частоту f_{emp} – кількість вимірювань з виявленим ефектом;
   - теоретичну частоту $f_{\text{teor}} = nP$, де

   n – кількість всіх вимірювань,

   P – задана ймовірність ефекту.

2. З поданої далі таблиці визначаємо допустимість використання біноміального критерію m або іншого критерію для співставлення емпіричної частоти f_{emp} і теоретичної частоти f_{teor} для різних ймовірностей Р досліджуваного ефекту й різних гіпотез.

[6] Гублер Е.В. Вычислительные методы анализа и распознавания патологических последствий. – Л.: Медицина, 1978. – 296 с.

	H_1: $f_{emp} > f_{teor}$	H_0: $f_{emp} \leq f_{teor}$
P < 0,5	m ($2 \leq n \leq 50$)	χ^2 ($30 \leq n$)
P = 0,5	m ($5 \leq n \leq 300$)	G ($5 \leq n \leq 300$)
P > 0,5	χ^2 ($30 \leq n$)	m ($2 \leq n \leq 50$)

3. Якщо допустиме використання біноміального критерію, то визначаємо критичне значення m за таблицею 12.

4. Якщо $f_{emp} > m$, то приймаємо гіпотезу H_1.

5.13. Коефіцієнт рангової кореляції r_s Спірмена

Призначення: визначення сили й напряму кореляційного зв'язку між двома ознаками.

Обмеження:

- нижня межа кількості вимірювань – 5;
- верхня межа кількості вимірювань – до 40 – *визначається наявними таблицями критичних значень.*

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – кореляція між змінними (ієрархіями) не відрізняється від 0;

$\boldsymbol{H_1}$ – кореляція між змінними (ієрархіями) достовірно відрізняється від 0.

Алгоритм:

1. Приписуємо ранги даним вимірювання *кожної* змінної (див. розділ 5.2).

2. Знаходимо $\Sigma^N_{j=1} \Delta^2_j$ — суму квадратів різниць рангів (N – кількість вимірювань).

3. Знаходимо поправки на наявність однакових рангів:

$$T_A = \Sigma\,(a^3 - a) / 12; \quad T_B = \Sigma\,(b^3 - b) / 12,$$

де a, b — об'єми кожної групи однакових рангів відповідно для результатів вимірювання двох змінних. Ці поправки дорівнюють 0, якщо результати вимірювань різні.

4. Обчислюємо коефіцієнт рангової кореляції

$$r_s = 1 - 6 \cdot \frac{\sum_{j=1}^{N} \Delta_j^2 + T_A + T_B}{N \cdot (N^2 - 1)}.$$

5. За таблицею 13 додатку визначаємо r_c – критичне значення коефіцієнту рангової кореляції для даного N.

6. Якщо $r_c \leq r_s$, то приймаємо гіпотезу H_1.

5.14. Однофакторний дисперсійний аналіз для незв'язаних вибірок

Призначення: дослідження змін ознаки під впливом змінних умов чи градацій певного фактора.

Обмеження:

- не менше 3 градацій фактора;
- не менше 2 вимірювань для кожної градації;
- рівність дисперсій у кожній комірці дисперсійного комплексу;
- нормальний розподіл ознаки у вибірках.

Гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – відмінності між градаціями фактора (різними умовами) виражені не більше, ніж випадкові відмінності в межах кожної групи;

$\boldsymbol{H_1}$ – відмінності між градаціями фактора (різними умовами) виражені більше, ніж випадкові відмінності в межах кожної групи.

Алгоритм:

1. Обчислюємо варіативність, зумовлену дією фактору:

$$S_f = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{c}\left(\sum_{j\in J_k} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2$$

Тут використано такі позначення:
x_j – величина вимірювання j;
N – кількість всіх спостережень;
n – кількість спостережень у кожній групі;
$c = N / n$ – кількість груп;
J_k – множина номерів спостережень, які належать групі k.

2. Обчислюємо загальну варіативність:

$$S = \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2. \quad (1)$$

3. Обчислюємо (випадкову, залишкову) варіативність, зумовлену неврахованими факторами:

$$S_\Delta = S - S_f.$$

4. Обчислюємо кількість степенів свободи:

$$\nu = N - 1,\ \nu_f = c - 1,\ \nu_\Delta = \nu - \nu_f.$$

5. Обчислюємо відношення:

$$F_f = (S_f / \nu_f) : (S_\Delta / \nu_\Delta).$$

6. За таблицею 14 визначаємо критичну величину F_{cr} для даних[7] ν_f і ν_Δ.

7. Якщо $F_{cr} \leq F_f$, то відхиляємо гіпотезу H_0 .

5.15. Однофакторний дисперсійний аналіз для зв'язаних вибірок

Призначення: дослідження змін ознаки під впливом змінних умов чи градацій певного фактора на одну вибірку піддослідних.

Обмеження:

- не менше трьох градацій фактора;
- не менше двох вимірювань для кожної градації;
- рівність дисперсій у кожній комірці дисперсійного комплексу;
- нормальний розподіл ознаки у вибірці.

Гіпотези:

Варіант А

$\boldsymbol{H_0^A}$ – відмінності між градаціями фактора (різними умовами) виражені не більше, ніж випадкові відмінності;

$\boldsymbol{H_1^A}$ – відмінності між градаціями фактора (різними умовами) виражені більше, ніж випадкові відмінності.

Варіант В

$\boldsymbol{H_0^B}$ – індивідуальні відмінності між піддослідними виражені не більше, ніж випадкові відмінності;

$\boldsymbol{H_1^B}$ – індивідуальні відмінності між піддослідними виражені більше, ніж випадкові відмінності.

[7] Тут і далі параметри перераховано у тому ж порядку, як і в описі таблиці.

Алгоритм:

1. Обчислюємо

$$S_A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{c}\left(\sum_{j\in J_k} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2$$

з таким тлумаченням змінних:

x_j – величина вимірювання j;

N – кількість всіх спостережень;

n – кількість піддослідних;

$c = N / n$ – кількість вимірювань для кожного піддослідного;

J_k – множина номерів спостережень, які проведено щодо умови (характеристики) k.

2. Обчислюємо загальну варіативність S за формулою (1).

3. Обчислюємо

$$S_B = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\in I_k} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2,$$

де I_k – множина номерів спостережень, які проведено щодо піддослідного k.

4. Обчислюємо (випадкову, залишкову) варіативність: $\Delta S = S - S_A - S_B$.

5. Обчислюємо кількість степенів свободи:

$\nu = N - 1$; $\nu_A = c - 1$; $\nu_B = n - 1$;

$\nu_\Delta = \nu - \nu_A - \nu_B$.

6. Обчислюємо відношення:

$F^A = (S_A/\nu_A) : (S_\Delta/\nu_\Delta)$;

$F^B = (S_B/\nu_B) : (S_\Delta/\nu_\Delta)$.

7. За таблицею 15 визначаємо критичні величини:

F_{cr}^{A} для даних ν_A і ν_Δ;

F_{cr}^{B} для даних ν_B і ν_Δ;

8. Якщо $F_{cr}^{A} \le F^A$, то відхиляємо гіпотезу H_0^A. Якщо $F_{cr}^{B} \le F^B$, то відхиляємо гіпотезу H_0^B.

5.16. Двофакторний дисперсійний аналіз для незв'язаних вибірок

Призначення: дослідження змін ознаки під впливом одночасної дії двох факторів на різні вибірки піддослідних.

Обмеження:

- не менше двох градацій кожного фактора;
- не менше двох вимірювань для кожної комірки комплексу;
- рівність дисперсій у кожній комірці дисперсійного комплексу, що забезпечується однаковою кількістю вимірювань в усіх комірках комплексу[8];
- кожній градації фактора A відповідає однакова кількість градацій фактора B;
- нормальний розподіл ознаки у вибірці;
- незалежність факторів.

Гіпотези:

Варіант А

$\boldsymbol{H_0^A}$ – відмінності у проявах ознаки, обумовлені дією фактора А, виражені не більше, ніж випадкові відмінності;

$\boldsymbol{H_1^A}$ – відмінності у проявах ознаки, обумовлені дією фактора А, виражені більше, ніж випадкові відмінності.

Варіант B

$\boldsymbol{H_0^B}$ – відмінності у проявах ознаки, обумовлені дією фактора B, виражені не більше, ніж випадкові відмінності;

$\boldsymbol{H_1^B}$ – відмінності у проявах ознаки, обумовлені дією фактора B, виражені більше, ніж випадкові відмінності.

Варіант AB

$\boldsymbol{H_0^{AB}}$ – вплив фактора A на прояв ознаки однаковий для різних градацій фактора B, і навпаки;

$\boldsymbol{H_1^{AB}}$ – вплив фактора A на прояв ознаки різний для різних градацій фактора B, і навпаки.

В алгоритмі використано такі позначення:

n – кількість піддослідних у кожній комірці;

a – кількість градацій фактора A;

b – кількість градацій фактора B;

$N = abn$ — кількість всіх вимірювань;

A_k – множина номерів вимірювань, для яких градація фактора A має номер k;

B_l – множина номерів вимірювань, для яких градація фактора B має номер k;

x_j – величина вимірювання j;

Алгоритм:

1. Обчислюємо:

$$S = \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2;$$

$$S_A = \frac{1}{bn}\sum_{k=1}^{a}\left(\sum_{j\in A_k} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2;$$

$$S_B = \frac{1}{an}\sum_{k=1}^{b}\left(\sum_{j\in B_k} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2;$$

$$S_{AB} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{b}\left(\sum_{j\in A_k\cap B_l} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2 - S_A - S_B;$$

$$S_\Delta = S - S_A - S_B - S_{AB}.$$

2. Обчислюємо кількість степенів свободи:

$\nu = N - 1$, $\nu_A = a - 1$, $\nu_B = b - 1$,

$\nu_{AB} = \nu_A \cdot \nu_B$, $\nu_\Delta = \nu - \nu_A - \nu_B - \nu_{AB}$.

3. Обчислюємо відношення:

$F^A = (S_A/\nu_A) : (S_\Delta/\nu_\Delta)$;

$F^B = (S_B/\nu_B) : (S_\Delta/\nu_\Delta)$;

$F^{AB} = (S_{AB}/\nu_{AB}) : (S_\Delta/\nu_\Delta)$.

4. За таблицею 16 визначаємо критичні величини:

F_{cr}^{A} для даних ν_A і ν_Δ;

F_{cr}^{B} для даних ν_B і ν_Δ;

F_{cr}^{AB} для даних ν_{AB} і ν_Δ;

5. Якщо $F_{cr}^{A} \le F^A$, то відхиляємо гіпотезу H_0^A. Якщо $F_{cr}^{B} \le F^B$, то відхиляємо гіпотезу H_0^B. Якщо $F_{cr}^{AB} \le F^{AB}$, то відхиляємо гіпотезу H_0^{AB}.

5.17. Двофакторний дисперсійний аналіз для зв'язаних вибірок

[8] Для нерівномірних комплексів можна використати алгоритми, подані у виданні: Плохинский Н.А. Биометрия. – 2-е изд. – М.: МГУ1970. – 368 с.

Призначення: дослідження змін ознаки під впливом одночасної дії двох факторів на одну й ту саму вибірку піддослідних.

Обмеження:

- не менше 2 градацій кожного фактора;
- не менше 2 вимірювань для кожної комірки комплексу;
- рівність дисперсій у кожній комірці дисперсійного комплексу, що забезпечується однаковою кількістю вимірювань в усіх комірках комплексу;
- кожній градації фактора *A* відповідає однакова кількість градацій фактора *B*;
- нормальний розподіл ознаки у вибірці;
- незалежність факторів;
- кожний піддослідний має пройти всі поєднання градацій обох факторів.

Гіпотези:

<u>Варіант А</u>

H_0^A – відмінності у проявах ознаки, обумовлені дією фактора *A,* виражені не більше, ніж випадкові відмінності;

H_1^A – відмінності у проявах ознаки, обумовлені дією фактора *A*, виражені більше, ніж випадкові відмінності.

<u>Варіант В</u>

H_0^B – відмінності у проявах ознаки, обумовлені дією фактора *B*, виражені не більше, ніж випадкові відмінності;

H_1^B – відмінності у проявах ознаки, обумовлені дією фактора *B*, виражені більше, ніж випадкові відмінності.

<u>Варіант АВ</u>

H_0^{AB} – вплив фактора *A* на прояв ознаки однаковий для різних градацій фактора *B*, і навпаки;

H_1^{AB} – вплив фактора *A* на прояв ознаки різний для різних градацій фактора *B*, і навпаки.

<u>Варіант І</u>

H_0^I – відмінності у проявах ознаки, обумовлені індивідуальними особливостями, виражені не більше, ніж випадкові відмінності;

H_1^I – відмінності у проявах ознаки, обумовлені індивідуальними особливостями, виражені більше, ніж випадкові відмінності.

В алгоритмі використано такі позначення:

n – кількість піддослідних;

a – кількість градацій фактора A;

b – кількість градацій фактора B;

$N = abn$ – кількість всіх вимірювань;

A_k – множина номерів вимірювань, для яких градація фактора A має номер k;

B_k – множина номерів вимірювань, для яких градація фактора B має номер k;

I_k – множина номерів вимірювань, піддослідного k;

x_j – величина вимірювання j.

Алгоритм:

1. Обчислюємо:

$$S = \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2;$$

$$S_A = \frac{1}{bn}\sum_{k=1}^{a}\left(\sum_{j\in A_k} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2;$$

$$S_B = \frac{1}{an}\sum_{k=1}^{b}\left(\sum_{j\in B_k} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2;$$

$$S_I = \frac{1}{ab}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\in I_k} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2;$$

$$S_{AB} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{b}\left(\sum_{j\in A_k\cap B_l} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2 - S_A - S_B;$$

$$S_{AI} = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j\in A_k\cap I_l} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2 - S_A - S_I;$$

$$S_{BI} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j\in B_k\cap I_l} x_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2 - S_B - S_I;$$

$$S_{ABI} = S - S_A - S_B - S_I - S_{AB} - S_{AI} - S_{BI}.$$

2. Обчислюємо кількості степенів свободи:

$$\nu = N - 1;\quad \nu_I = n - 1;$$
$$\nu_A = a - 1;\quad \nu_B = b - 1;$$
$$\nu_{AB} = \nu_A \cdot \nu_B;\quad \nu_{AI} = \nu_A \cdot \nu_I;$$
$$\nu_{BI} = \nu_B \cdot \nu_I;\quad \nu_{ABI} = \nu_A \cdot \nu_B \cdot \nu_I.$$

3. Обчислюємо відношення:

$$F^A = (S_A / \nu_A) : (S_{AI} / \nu_{AI});$$
$$F^B = (S_B / \nu_B) : (S_{BI} / \nu_{BI});$$
$$F^{AB} = (S_{AB} / \nu_{AB}) : (S_{ABI} / \nu_{ABI});$$
$$F^I = (S_I / \nu_I) : (S_{ABI} / \nu_{ABI}).$$

4. За таблицею 14 визначаємо критичні величини:

F_{cr}^A для даних ν_A і ν_{AI};

F_{cr}^B для даних ν_B і ν_{BI};

F_{cr}^{AB} для даних ν_{AB} і ν_{ABI};

F_{cr}^I для даних ν_I і ν_{ABI}.

5. Якщо $F_{cr}^A \le F^A$, то відхиляємо гіпотезу H_0^A.

Якщо $F_{cr}^B \le F^B$, то відхиляємо гіпотезу H_0^B.

Якщо $F_{cr}^{AB} \le F^{AB}$, то відхиляємо гіпотезу H_0^{AB}.

Якщо $F_{cr}^I \le F^I$, то відхиляємо гіпотезу H_0^I.